

Cálculo da dose pelo método LTP_n para valores discretos de energia

L. B. Trindade¹; E. E. Streck¹ e A. W. Elbern¹

¹Departamento de Engenharia Nuclear-UFRGS
Av. Osvaldo Aranha, 99/ 4º andar, Porto Alegre, RS 90046-900

Resumo - Neste trabalho, uma solução analítica para o fluxo de energia é obtida para a Equação de Transporte de Boltzmann através do método LTP_N². O cálculo é feito para valores discretos de energia. Por fim, a taxa de dose absorvida é calculada.

Abstract - In this paper, an analytical solution to the energy flux is obtained for the Transport Equation using the LTP_N method². The numerical results are achieved for discrete values of energy. Finally, the absorbed dose rate is obtained.

Introdução

O cálculo da dose é de grande importância no tratamento de tumores através da radioterapia. Durante o tratamento, é necessário conhecer quanto de radiação é absorvida pelo tumor e pelos órgãos próximos, a fim de evitar uma superdosagem num tecido sadio ou uma subdosagem no tumor. A dose está diretamente relacionada com o fluxo escalar de fótons e com a energia destes.

A Equação de Transporte de Boltzmann descreve o comportamento de um feixe de fótons que atravessa um meio material o qual atenua o feixe através da absorção e do espalhamento. Neste trabalho obtém-se uma solução analítica para o caso particular da Equação de Transporte de Boltzmann, em que o feixe atravessa uma camada de água, levando em conta o espalhamento da radiação incidente em valores discretos de energia.

Considerando o caso unidimensional, independente do tempo, com fluxos angulares $I(x, \lambda, \omega)$ conhecidos nas fronteiras, sem fonte externa e escrevendo a equação em termos do comprimento de onda λ da radiação, chega-se à seguinte expressão³:

$$\omega \frac{\partial}{\partial x} I(x, \lambda, \omega) + \mu(\lambda) I(x, \lambda, \omega) = \int_{-4\pi}^{4\pi} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2} \Sigma(\lambda' \rightarrow \lambda; \Omega' \rightarrow \Omega) I(x, \lambda, \omega') d\lambda' d\Omega \quad (1)$$

$$\int_{-4\pi}^{4\pi} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2} \Sigma(\lambda' \rightarrow \lambda; \Omega' \rightarrow \Omega) I(x, \lambda, \omega') d\lambda' d\Omega$$

onde $\omega = \cos\theta$, $\lambda = 0.511 / E$ (adimensional).

Tratando a variável angular ω através de Polinômios de Legendre e usando suas propriedades, chega-se às equações $P_L[3]$:

$$\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial}{\partial x} I_{l+1}(x, \lambda) + \frac{1}{2l+1} \frac{\partial}{\partial x} I_{l-1}(x, \lambda) + \mu(\lambda) I_l(x, \lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2} \Sigma_l(\lambda', \lambda) I_l(x, \lambda') d\lambda' \quad (2)$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2} \Sigma_l(\lambda', \lambda) I_l(x, \lambda') d\lambda'$$

para $l=0, 1, \dots, L$ (L ímpar).

Usando o núcleo de espalhamento de Klein-Nishina³:

$$\Sigma_l(\lambda', \lambda) = \alpha k(\lambda', \lambda) P_l(1 + \lambda' - \lambda) \quad (3)$$

onde $\alpha = \frac{NZ\rho}{A} \sigma_T = 0,40061 \frac{Z\rho}{A} \text{ [cm}^{-1}\text{]}$

com $N = n^\circ \text{ de Avogadro [} 6,02 \times 10^{23} / \text{mol}]$,

$Z = n^\circ \text{ atômico,}$

$A = \text{massa atômica [u.m.a],}$

$\rho = \text{densidade do meio [gramas/cm}^3\text{],}$

$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$ é a secção de choque de Thomson $[6,65245 \times 10^{-25} \text{ cm}^2]$ e

Thomson $[6,65245 \times 10^{-25} \text{ cm}^2]$ e

$$k(\lambda', \lambda) = \frac{3}{8} \frac{\lambda'}{\lambda} \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} + 2(\lambda' - \lambda) + (\lambda' - \lambda)^2 \right] \quad (3a)$$

para $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda'+2$ ou $k(\lambda', \lambda) = 0$ no caso contrário.

As variáveis λ e λ' são o comprimento de onda do fóton espalhado e do fóton incidente respectivamente. O termo integral na equação (2) é calculado através de uma aproximação por Quadratura de Gauss¹, com a seguinte mudança de variável: $\lambda = \tau + 1 + \lambda_0$, resultando no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial}{\partial x} I_{l+1}(x, \lambda_j) + \frac{1}{2l+1} \frac{\partial}{\partial x} I_{l-1}(x, \lambda_j) + \mu(\lambda_j) I_l(x, \lambda_j) = \alpha \sum_{i=1}^M w_i k(\lambda_i, \lambda_j) P_l(1 + \lambda_i - \lambda_j) I_l(x, \lambda_i) \quad (4)$$

$$\alpha \sum_{i=1}^M w_i k(\lambda_i, \lambda_j) P_l(1 + \lambda_i - \lambda_j) I_l(x, \lambda_i)$$

para $0 \leq l \leq L$ e $1 \leq i, j \leq M$, sendo t e w os zeros e pesos da Quadratura de Gauss¹.

Resultados e Conclusões

A equação foi resolvida para $L=1$ e $M=5$, aplicando a Transformada de Laplace na variável x , como já foi mostrado por Streck². Os resultados foram obtidos considerando um feixe monocromático com energia de 2MeV incidindo na superfície $x=0$ de uma camada de água com 20 cm de espessura. Fora da camada é considerado vácuo. As condições de contorno são descritas como:

$$I(0, \lambda_1, \omega) = 1 \text{ para } 0 < \omega \leq 1.$$

$$I(0, \lambda_i, \omega) = 0 \text{ para } 0 < \omega \leq 1 \text{ e } i=2, \dots, 5.$$

$$I(20, \lambda_i, \omega) = 0 \text{ para } -1 \leq \omega < 0 \text{ e } i=1, \dots, 5.$$

Os parâmetros empregados na solução do problema descrito são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1- Valores de energia, coeficientes de atenuação, absorção, zeros e pesos da Quadratura de Gauss.

i	t_i	w_i	E_i [MeV]	μ_i [cm ⁻¹]	μ_{ai} [cm ⁻¹]
1	-	0.236927	1.462842	0.058474	0.028693
		0.906180			
2	-	0.478629	0.712661	0.083260	0.032449
		0.538469			
3		0.568889	0.407009	0.105341	0.032814
		0.000000			
4		0.478629	0.284843	0.121577	0.031782
		0.538469			
5		0.236927	0.236390	0.129814	0.030764
		0.906180			

O fluxo escalar $\Phi(x)$ definido como

$$\Phi(x, \lambda_i) = \int_{-1}^{+1} I(x, \lambda_i, \omega) d\omega \quad (5)$$

é mostrado na Figura 1 para cada um dos cinco valores de energia considerados. A Figura 2 mostra os valores obtidos para a taxa dose em função da posição, definida como:

$$\dot{D}(x) = C \sum_i^M \mu_{ai} E_i \Phi_i(x) \quad (6)$$

considerando os fluxos escalares normalizados. A constante $C^3 = 0.05767$ [cm³.s/MeV] é o fator que converte a taxa de dose em mrad/h, para o fluxo escalar em [fótons/cm².s], a energia em [MeV] e o coeficiente de absorção em [cm⁻¹].

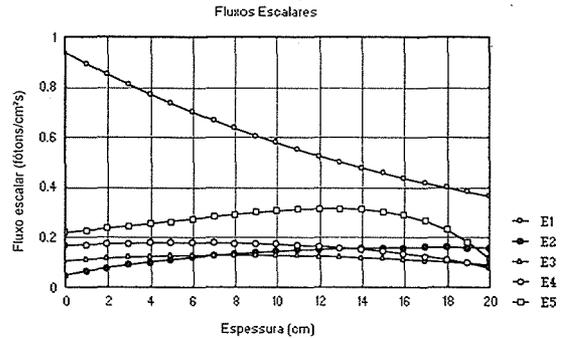


Figura 1- Fluxos escalares em função da posição.

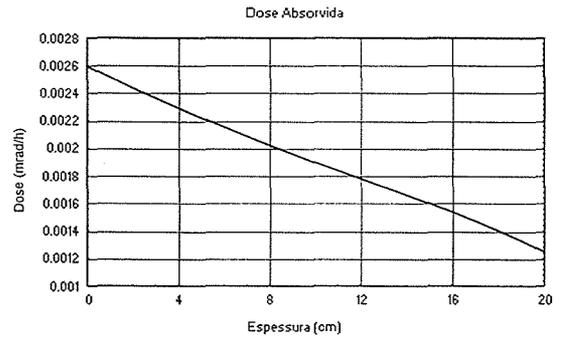


Figura 2- Taxa de dose em função da posição.

Os resultados obtidos mostram que a dose absorvida pode ser obtida analiticamente, após a região de *build-up*, aplicando o método LTP_N^2 resolvido para valores discretos de energia. Melhores resultados podem ser obtidos considerando ordens superiores na aproximação P_N e um número maior de valores de energia.

Referências

¹ BURDEN, RICHARD L., *Numerical Analysis*. PWS-KENT Publishing Company, Boston, Massachusetts, 1988.

² STRECK, ELAINE E., *Solução Analítica para a Aproximação P_N da Eq. de Transporte Linear Unidimensional*, Tese de Doutorado, Porto Alegre, PROMEC-UFRGS, 1993.

³ WOOD, JAMES., *Computational Methods in Reactor Shielding*, p. 397-404, Pergamon Press, Oxford, England, 1982.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Prof. Dr. M. T. Vilhena pelas valiosas sugestões. E. E. Streck agradece ao CNPq pelo apoio financeiro e L. B. Trindade pelo apoio financeiro da CAPES.